Q. E. D.
quod erat demonstrandum

Štefko Miklavič

UP IAM in UP FAMNIT

29. avgust 2012

Pitagorov izrek

Pitagorov izrek

V pravokotnem trikotniku s hipotenuzo dolžine c in katetama dolžine a in b velja

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dokaz s kontrapozicijo

Če želimo dokazati, da iz trditve P sledi trditev Q, potem je to isto, kot če pokažemo, da iz trditve $\neg Q$ sledi trditev $\neg P$.

Dokaz s kontrapozicijo

Izrek o x in x^2

Naj bo x celo število. Če je x^2 sodo število, potem je tudi x sodo število.

Dokaz s protislovjem

Recimo, da želimo dokazati trditev P. Pri dokazu s protislovjem predpostavimo, da velja negacija trditve P, torej $\neg P$. Če nam uspe s pomočjo te predpostavke "pridelati" protislovje, potem seveda negacija trditve P ne more držati, torej drži trditev P.

Dokaz s protislovjem

Izrek o $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ je iracionalno število, oziroma, $\sqrt{2}$ se ne da napisati v obliki $\frac{m}{n}$, kjer sta m in n celi števili.

Dokaz s protislovjem

Izrek o praštevilih

Praštevil je neskončno mnogo.

Dokaz z matematično indukcijo

Recimo, da želimo dokazati, da je dana trditev resnična za **vsako** naravno število n. Pri dokazu z matematično indukcijo to storimo v dveh korakih:

1. Pokažemo, da je naša trditev resnična za prvo naravno število $n = 1$.
2. Pokažemo, da če je naša trditev resnična za naravno število n, potem je resnična tudi za naslednje naravno število $n + 1$.

Dokaz z matematično indukcijo

Izrek o vsoti lihih naravnih števil

Za vsako naravno število n velja formula

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Dokaz z matematično indukcijo

Izrek o tlakovanju

Naj bo P pravokotnik. Če lahko P tlakujemo z manjšimi pravokotniki, ki imajo vsaj eno od stranic celoštevilske dolžine, potem ima tudi P vsaj eno stranico celoštevilske dolžine.

Dokaz s konstrukcijo

Obstajata iracionalni števili a in b, tako da je a^b racionalno število.

Ne-konstruktiven dokaz

Obstajata iracionalni števili a in b, tako da je a^b racionalno število.

Pigeon-hole principle (princip golobnjaka)

Če moramo $n + 1$ stvari (golobov) razporediti v n predalov (golobnjakov), potem bosta v vsaj enem od predalov (golobnjakov) vsaj dve stvari (dva goloba).

Pigeon-hole principle (princip golobnjaka)

Naj bo n poljubno naravno število. Iz množice $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ izberimo $n+1$ števil. Potem med izbranimi števili obstajata števili a in b, tako da a deli b.

Izrek o številu e

Izrek o številu e

Število

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71828\ldots$$

je iracionalno.

Dokaz: Fourier

Sylvester - Gallai-ev izrek

Sylvester - Gallai-ev izrek

Recimo, da imamo v ravnini n točk, ki ne ležijo vse na isti premici. Potem obstaja premica, ki vsebuje natanko dve od teh n točk.

Dokaz: L. M. Kelly

Sylvester - Gallai-ev izrek

Označimo s $\mathcal{P}$ množico izbranih točk v ravnini, ter z $\mathcal{L}$ množico vseh premic, ki vsebujejo vsaj dve točki iz množice $\mathcal{P}$.

Sylvester - Gallai-ev izrek

Označimo s $\mathcal{P}$ množico izbranih točk v ravnini, ter z $\mathcal{L}$ množico vseh premic, ki vsebujejo vsaj dve točki iz množice $\mathcal{P}$.

Izmed vseh parov (P, ℓ), kjer je $P \in \mathcal{P}$ in $\ell \in \mathcal{L}$ izberimo tisti par (P_0, ℓ_0), za katerega velja, da ℓ_0 ne vsebuje P_0 in je razdalja med ℓ_0 in P_0 najmanjša možna. Naj bo Q tista točka na premici ℓ_0, ki je najbližja točki P_0.

Sylvester - Gallai-ev izrek

Označimo s $\mathcal{P}$ množico izbranih točk v ravnini, ter z $\mathcal{L}$ množico vseh premic, ki vsebujejo vsaj dve točki iz množice $\mathcal{P}$.

Izmed vseh parov (P, ℓ), kjer je $P \in \mathcal{P}$ in $\ell \in \mathcal{L}$ izberimo tisti par (P_0, ℓ_0), za katerega velja, da ℓ_0 ne vsebuje P_0 in je razdalja med ℓ_0 in P_0 najmanjša možna. Naj bo Q tista točka na premici ℓ_0, ki je najbližja točki P_0.

Trdimo, da premica ℓ_0 vsebuje samo dve točki iz množice $\mathcal{P}$.

Sylvester - Gallai-ev izrek

Recimo, da to ni res - torej premica ℓ_0 vsebuje vsaj tri točke iz množice $\mathcal{P}$. Vsaj dve od teh treh točk zato ležita na isti strani točke Q - označimo ti dve točki s P_1 in P_2. Predpostavimo tudi lahko, da P_1 leži med Q in P_2 (lahko se seveda zgodi tudi, da je $P_1 = Q$).

Sylvester - Gallai-ev izrek

Naj bo sedaj ℓ_1 premica, ki poteka skotzi P_2 in P_0. Očitno ℓ_1 ne vsebuje P_1, ter je razdalja med P_1 in ℓ_1 manjša od razdalje med P_0 in ℓ_0. To pa je seveda v protislovju z izbiro para (P_0, ℓ_0). **Q.E.D**

Izrek Erdos - de Bruijn

Izrek Erdos - de Bruijn

Naj bo $\mathcal{P}$ množica n točk v ravnini, ki ne ležijo vse na isti premici. Potem je število premic, ki potekajo skozi vsaj dve točki množice $\mathcal{P}$, vsaj n.

Izrek Erdos - de Bruijn

Izrek bomo dokazali z indukcijo. Če je $n = 3$, potem izrek očitno drži. Predpostavimo, da izrek drži v primeru, ko je $|\mathcal{P}| = n$, ter pokažimo, da potem drži tudi v primeru, ko je $|\mathcal{P}| = n + 1$.

Izrek Erdos - de Bruijn

Naj bo sedaj $|\mathcal{P}| = n + 1$. Po prejšnjem izreku vemo, da obstaja premica ℓ, ki vsebuje natanko dve točki množice $\mathcal{P}$ - označimo ti dve točki s P in Q. Oglejmo si sedaj množico točk $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$. Množica $\mathcal{P}'$ vsebuje n točk.

Izrek Erdos - de Bruijn

Če točke množice $\mathcal{P}'$ ne ležijo vse na isti premici, potem imamo vsaj n premic, ki vsebujejo vsaj dve točki množice $\mathcal{P}'$. Skupaj s premico ℓ imamo torej vsaj $n+1$ premic, ki vsebujejo vsaj dve točki množice $\mathcal{P}$.

Izrek Erdos - de Bruijn

Če točke množice $\mathcal{P}'$ ne ležijo vse na isti premici, potem imamo vsaj n premic, ki vsebujejo vsaj dve točki množice $\mathcal{P}'$. Skupaj s premico ℓ imamo torej vsaj $n+1$ premic, ki vsebujejo vsaj dve točki množice $\mathcal{P}$.

Če pa točke množice $\mathcal{P}'$ ležijo vse na isti premici, potem pa je premic, ki vsebujejo vsaj dve točki množice $\mathcal{P}$, natanko $n+1$.
Q.E.D

Paradoks rojstnih dnevov

Paradoks rojstnih dnevov

V množici 23 ljudi je verjetnost, da imata vsaj dva rojstni dan na isti dan, večja od $\frac{1}{2}$.

Paradoks rojstnih dnevov

Verjetnost, da imajo vsi ljudje iz naše množice rojstne dneve ob različnih dnevih je

$$\frac{(365-1)}{365}\frac{(365-2)}{365}\cdots\frac{(365-22)}{365} = 0,49270276567601.$$

Paradoks rojstnih dnevov

Verjetnost, da nimajo vsi ljudje iz naše množice rojstne dneve ob različnih dnevih (da imata torej vsaj dva rojstni dan na isti dan) je zato enaka

$$1 - 0,49270276567601 = 0,50729723432399.$$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
- $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
- $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
- $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + (2n+1)^2/4 = n^2 - n(2n+1) + (2n+1)^2/4$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
- $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + (2n+1)^2/4 = n^2 - n(2n+1) + (2n+1)^2/4$
- $\Big((n+1) - (2n+1)/2\Big)^2 = \Big(n - (2n+1)/2\Big)^2$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
- $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + (2n+1)^2/4 = n^2 - n(2n+1) + (2n+1)^2/4$
- $\Big((n+1) - (2n+1)/2\Big)^2 = \Big(n - (2n+1)/2\Big)^2$
- $(n+1) - (2n+1)/2 = n - (2n+1)/2$

In za konec ...

Dokaz, da je $1 = 0$

- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
- $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
- $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + (2n+1)^2/4 = n^2 - n(2n+1) + (2n+1)^2/4$
- $\Big((n+1) - (2n+1)/2\Big)^2 = \Big(n - (2n+1)/2\Big)^2$
- $(n+1) - (2n+1)/2 = n - (2n+1)/2$
- $n + 1 = n$, torej $1 = 0$. **Q.E.D**