Zdaj si vključen, zdaj si izključen

doc. dr. Primož Šparl

Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Matematika je kul

UP FAMNIT, Koper, 26. avgust 2013

Za začetek nekaj otročje lahkega

Pozabavajmo se z vprašanjem:

1. vprašanje:

Koliko naravnih števil do vključno 30 je deljivih z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7?

Odgovor na to vprašanje dobimo brez težav:

- Najprej poiščemo števila, ki so deljiva z 2.

Za začetek nekaj otročje lahkega

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Vseh števil je 30.

Za začetek nekaj otročje lahkega

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Takih, ki so deljiva z 2, je 15.

Za začetek nekaj otročje lahkega

Pozabavajmo se z vprašanjem:

1. vprašanje:

Koliko naravnih števil do vključno 30 je deljivih z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7?

Odgovor na to vprašanje dobimo brez težav:

- Najprej poiščemo števila, ki so deljiva z 2.
- Nato dodamo tista, ki so deljiva s 3, pa niso deljiva z 2.

Za začetek nekaj otročje lahkega

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Takih, ki so deljiva s 3, pa jih še nimamo, je 5.

Za začetek nekaj otročje lahkega

Pozabavajmo se z vprašanjem:

1. vprašanje:

Koliko naravnih števil do vključno 30 je deljivih z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7?

Odgovor na to vprašanje dobimo brez težav:

- Najprej poiščemo števila, ki so deljiva z 2.
- Nato dodamo tista, ki so deljiva s 3, pa niso deljiva z 2.
- Dodamo še tista, ki so deljiva s 5, ne pa tudi z 2 ali 3.

Za začetek nekaj otročje lahkega

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ostaneta še dve števili deljivi s 5, ki ju še nimamo.

Za začetek nekaj otročje lahkega

Pozabavajmo se z vprašanjem:

1. vprašanje:

Koliko naravnih števil do vključno 30 je deljivih z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7?

Odgovor na to vprašanje dobimo brez težav:

- Najprej poiščemo števila, ki so deljiva z 2.
- Nato dodamo tista, ki so deljiva s 3, pa niso deljiva z 2.
- Dodamo še tista, ki so deljiva s 5, ne pa tudi z 2 ali 3.
- Nazadnje dodamo še tista, ki so deljiva s 7, a z nobenim izmed števil 2, 3 in 5.

Za začetek nekaj otročje lahkega

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

In nazadnje dobimo še edino preostalo število deljivo s 7, namreč 7.

Za začetek nekaj otročje lahkega

Tako smo ugotovili, da je do vključno 30 natanko $15 + 5 + 2 + 1 = 23$ števil, ki so deljiva z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7.

Ta metoda naštevanja vseh ustreznih števil je precej bolj utrudljiva, če na primer iščemo vsa taka števila do vključno 300.

Kaj pa, če nas zanima naslednje:

2. vprašanje:

Koliko naravnih števil do vključno 1 000 000 je deljivih z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7?

Malce težji zalogaj

Tokrat štetje seveda odpove.

Naivna ideja:

- Do vključno 30 je takih števil 23.
- Ker je $1\,000\,000/30$ nekaj več kot $33\,333$, bo torej do milijona takih števil $23 \cdot 33\,333 = 766\,659$.
- Izkaže se, da s tovrstnim ugibanjem precej zgrešimo pravilen odgovor, ki je $771\,429$.

V nadaljevanju bomo razvili metodo, imenovano načelo vključitev in izključitev, ki bo omogočala reševanje takšnih in podobnih vprašanj.

Še eno lahko vprašanje

Oglejmo si še naslednje preprosto vprašanje:

3. vprašanje:

Koliko naravnih števil med vključno 1 in 30 je tujih številu 30?

Odgovor dobimo brez težav:

- Ker je 30 dovolj majhno število, lahko preverimo kar vsa števila po vrsti.
- Zaradi $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, se je potrebno izogniti vsem večkratnikom števil 2, 3 in 5.
- Tako nam ostanejo števila 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 in 29.

Pomagamo si lahko tudi s prejšnjim primerom, kjer smo ugotovili, da je naravnih števil do 30, ki so deljiva z vsaj enim izmed števil 2, 3 in 5, natanko $15 + 5 + 2 = 22$. Takih, ki jih iščemo mi, je torej 8.

Kaj pa, če zopet povečamo nabor dopustnih števil?

Zgornja metoda tudi tokrat odpove, če je izhodiščno število (prej 30) precej večje.

Tako je na ta način veliko težje določiti že število naravnih števil med 1 in 300, ki so tuja številu 300.

Še slabše se nam piše, če nas na primer zanima:

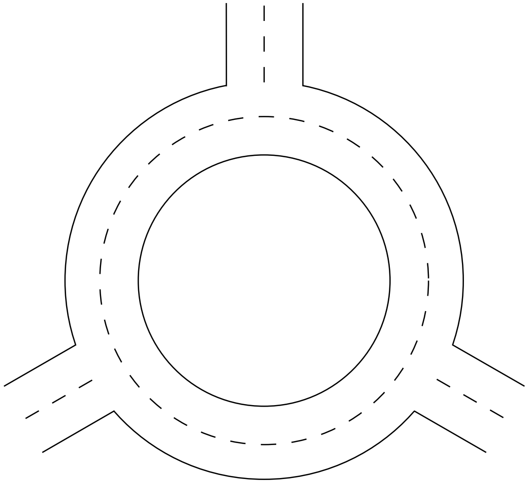
4. vprašanje:

Koliko naravnih števil med vključno 1 in 1 000 000 je tujih številu 1 000 000?

Tudi na to vprašanje bomo z našo metodo zlahka odgovorili.

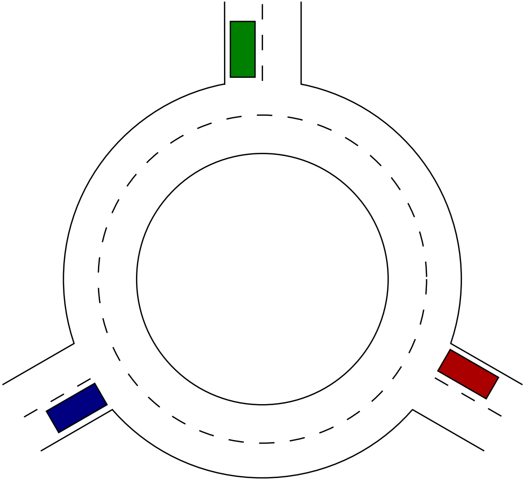
In še eno lahko vprašanje

Imamo naslednjo situacijo. Do krožišča vodijo tri priključne ceste.



In še eno lahko vprašanje

V nekem trenutku iz vsake od priključnih cest v krožišče pripelje po eno vozilo in ga nato tudi zapusti.



Krožišče

Nobeno vozilo ne prevozi celotnega kroga in na nobeno od priključnih cest ne zapelje več kot eno vozilo.

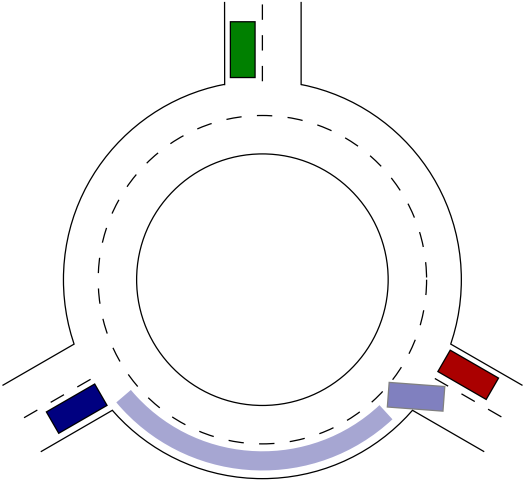
Na koliko načinov se lahko to zgodi?

Brž se prepričamo, da sta možnosti le dve.

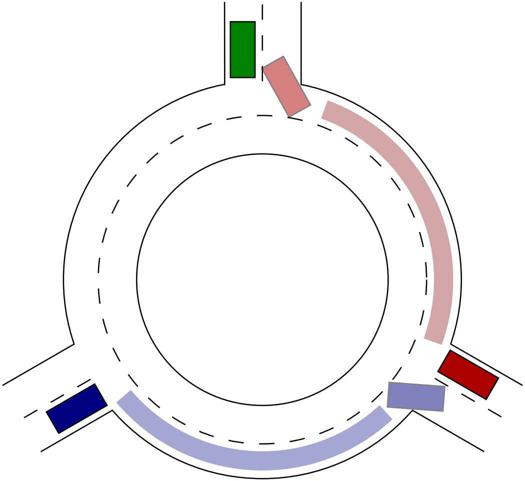
Takoj, ko se namreč modro vozilo odloči ali bo krožišče zapustilo na cesti, po kateri je pripeljalo rdeče vozilo, ali ne, je vse enolično določeno.

Križišče

Prva možnost:

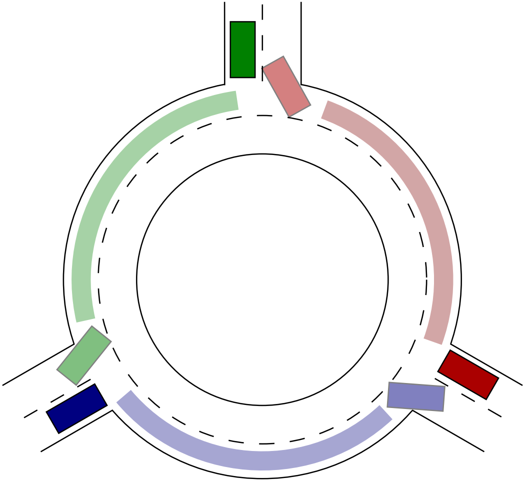


Prva možnost:



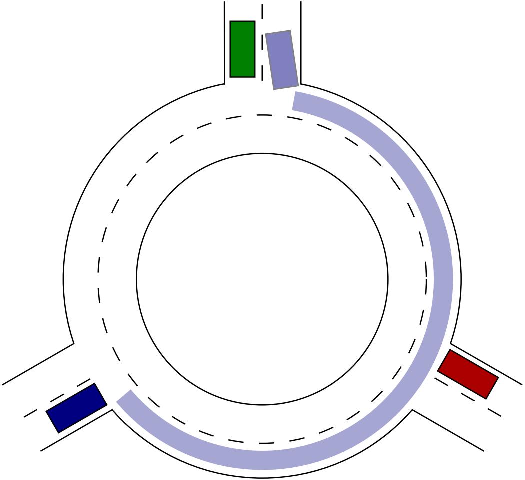
Krožišče

Prva možnost:

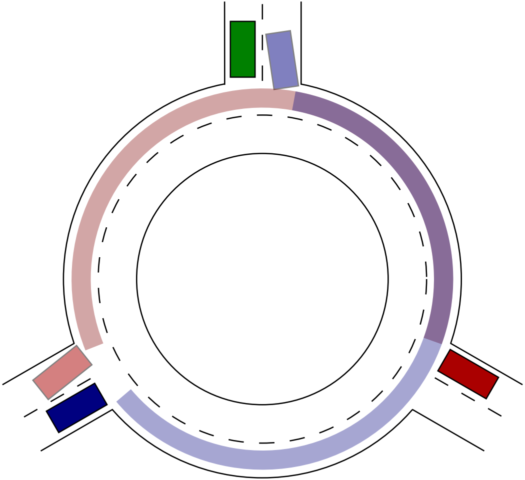


Krožišče

Druga možnost:

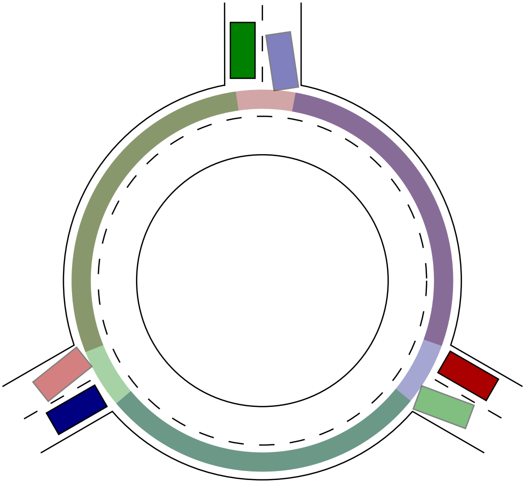


Druga možnost:



Krožišče

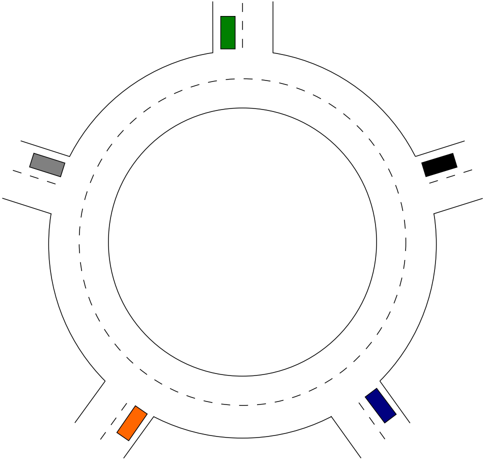
Druga možnost:



Kaj pa malce težje vprašanje?

Pri treh priključnih cestah se zares ni moglo zgoditi kaj pretresljivega.

Kaj pa, če je priključnih cest več? Na primer 4 ali 5?



Kaj pa malce težje vprašanje?

Bi znali pokazati, da je v primeru štirih cest možnosti 9, v primeru petih pa že 44?

Kaj pa tole?

5. vprašanje:

Na koliko načinov lahko vozila upoštevajo zapisane pogoje, če je priključnih cest (in s tem vozil) deset?

Tudi takšna vprašanja je mogoče razrešiti z našo metodo.

Nazaj k prvemu vprašanju

Vrnimo se k vprašanju o številu naravnih števil do vključno 30, ki so deljiva z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 in 7.

Označimo množico tistih, ki so deljiva z 2, z A_2, množico tistih, ki so deljiva s 3, z A_3, potem pa podobno vpeljimo še množici A_5 in A_7.

Določimo moč (torej število elementov) teh štirih množic.

Ker je v A_2 vsako drugo število, ali pa tudi zato, ker je prvo tako število $2 = 2 \cdot 1$, zadnje pa $30 = 2 \cdot 15$, očitno velja $|A_2| = 15$.
Podobno je najmanjše število v A_3 število $3 = 3 \cdot 1$, največje pa $30 = 3 \cdot 10$, in tako je $|A_3| = 10$.
Povsem podobno dobimo še $|A_5| = 6$ in $|A_7| = 4$ (največje število v A_7 je namreč $28 = 7 \cdot 4$).

Nazaj k prvemu vprašanju

Kaj smo torej ugotovili?

Če iščemo naravna števila med vključno m in n (kjer je $m \leq n$), ki so deljiva s k, velja:

Najmanjše tako število je $k \cdot \lceil \frac{m}{k} \rceil$.

Največje tako število je $k \cdot \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

Torej je ustreznih števil

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil + 1.$$

Na primer, med vključno 100 in 1000 je števil, ki so deljiva s 7, natanko $\lfloor \frac{1000}{7} \rfloor - \lceil \frac{100}{7} \rceil + 1 = 142 - 15 + 1 = 128$.

Nazaj k prvemu vprašanju

Imamo torej $|A_2| = 15$, $|A_3| = 10$, $|A_5| = 6$ in $|A_7| = 4$.

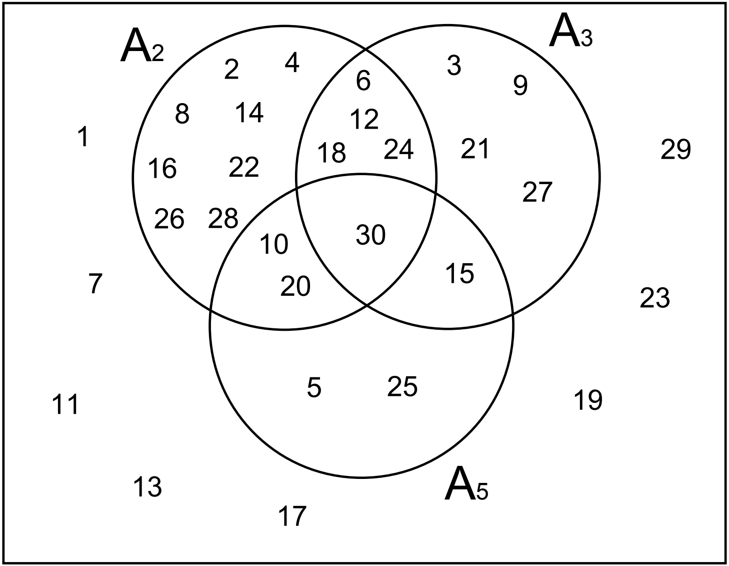
Vendar $|A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| = 35 \neq 23$. Kaj je narobe?

Število 6 smo na primer šteli dvakrat, enkrat v A_2 in enkrat v A_3. Podobno smo dvakrat šteli število 10.

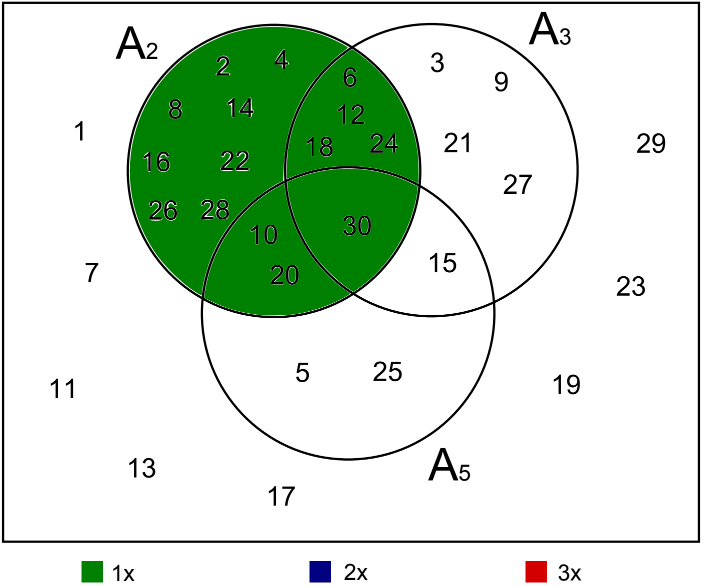
Oglejmo si vse skupaj z Vennovimi diagrami.

Za lažjo predstavo se za začetek omejimo na primer, kjer nas zanimajo samo števila, ki so deljiva z vsaj enim izmed števil 2, 3 in 5.
Tudi tu namreč z vsoto $|A_2| + |A_3| + |A_5| = 31$ ne dobimo pravega odgovora (namreč 22).

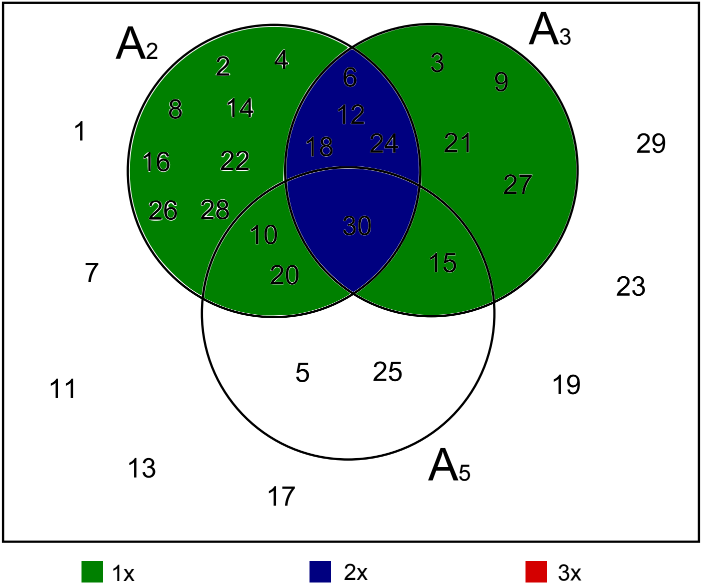
Vennovi diagrami za tri množice



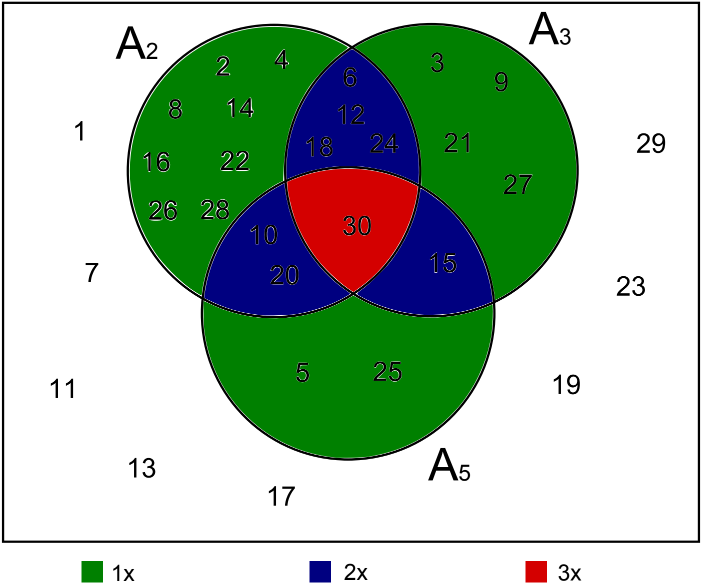
Vennovi diagrami za tri množice



Vennovi diagrami za tri množice



Vennovi diagrami za tri množice



Nazaj k prvemu vprašanju

Pa izračunajmo velikosti vseh dvojnih presekov, da bomo lahko od prejšnje vsote odšteli njihove velikosti.

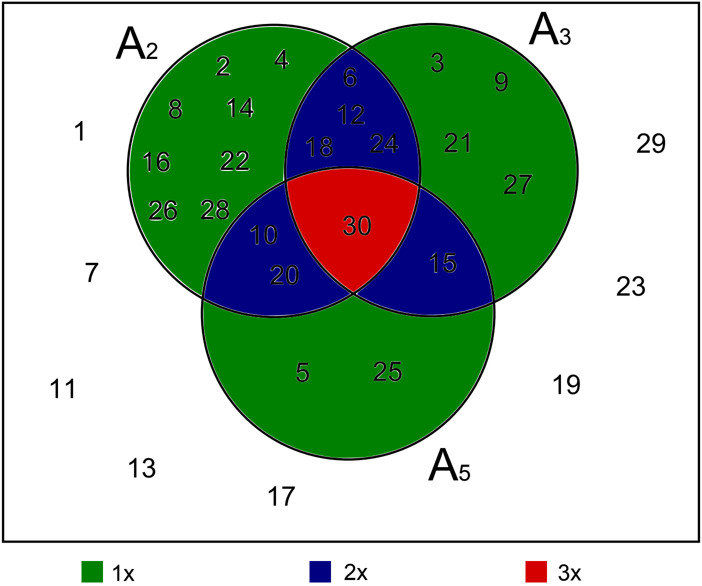
V množici $A_2 \cap A_3$ so ravno vsa števila, ki so deljiva tako z 2 kot s 3, torej gre ravno za števila, deljiva s 6. Dobimo $|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{30}{6} \rfloor - \lceil \frac{1}{6} \rceil + 1 = 5$.

Podobno potem dobimo še $|A_2 \cap A_5| = 3$, $|A_2 \cap A_7| = 2$, $|A_3 \cap A_5| = 2$, $|A_3 \cap A_7| = 1$ in $|A_5 \cap A_7| = 0$.

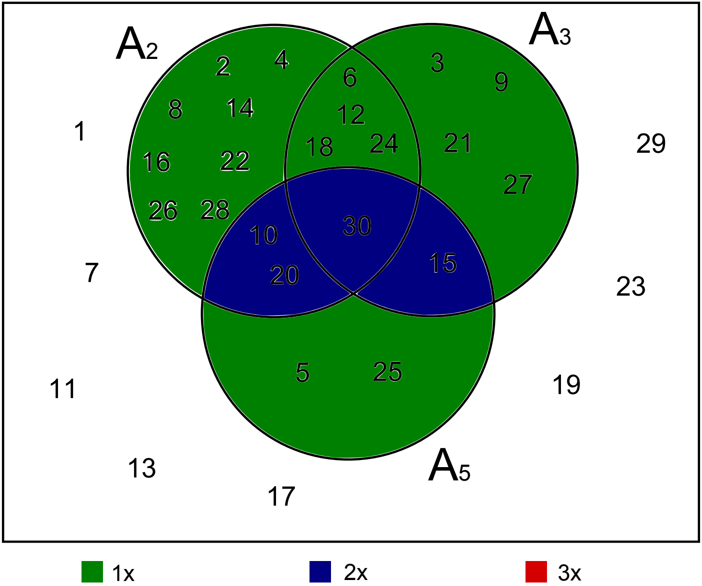
Poizkusimo sedaj ponovno: $35 - 5 - 3 - 2 - 2 - 1 - 0 = 22$, kar še vedno ni pravi rezultat (tudi v primeru deljivosti z 2, 3 ali 5, kjer je pravilen odgovor 22, mi dobimo $31 - 5 - 3 - 2 = 21$, kar ni pravilno).

Kaj smo zagrešili tokrat?

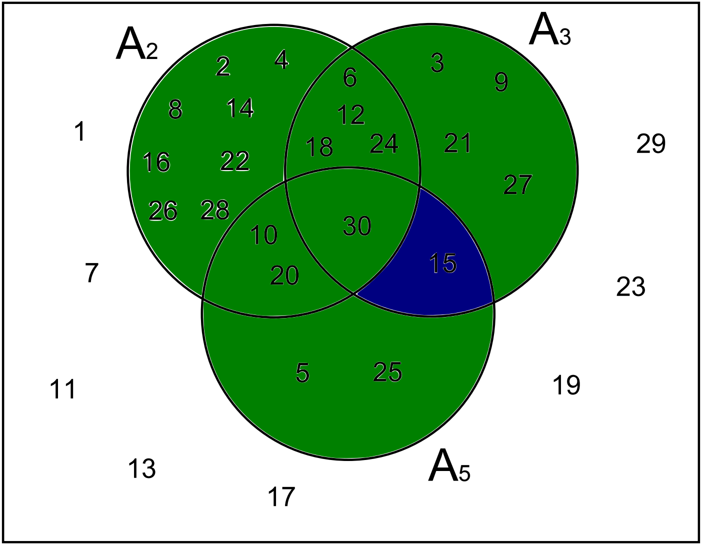
Vennovi diagrami za tri množice



Vennovi diagrami za tri množice

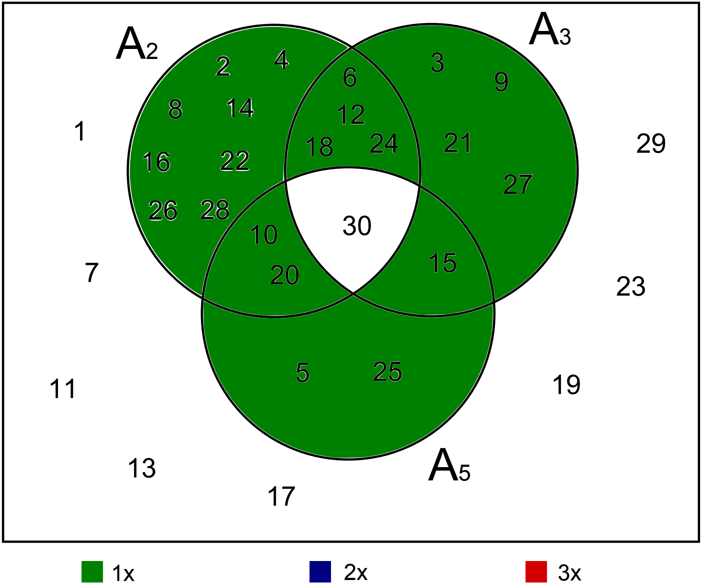


Vennovi diagrami za tri množice

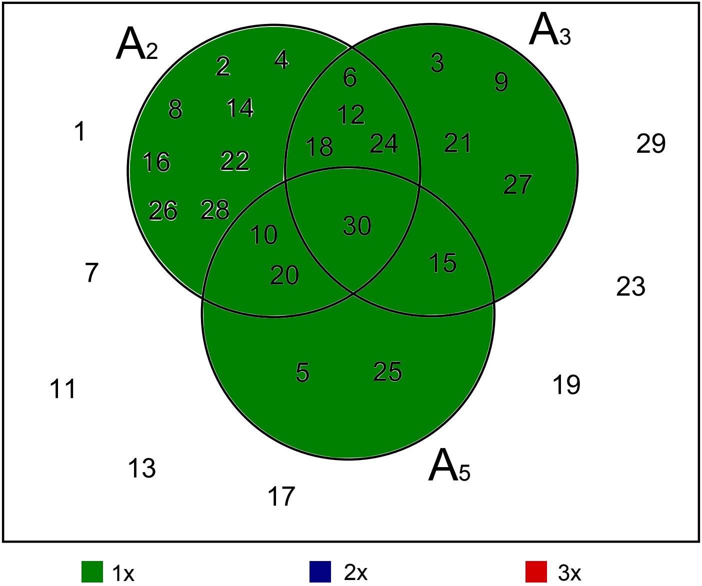


1x 2x 3x

Vennovi diagrami za tri množice



Vennovi diagrami za tri množice



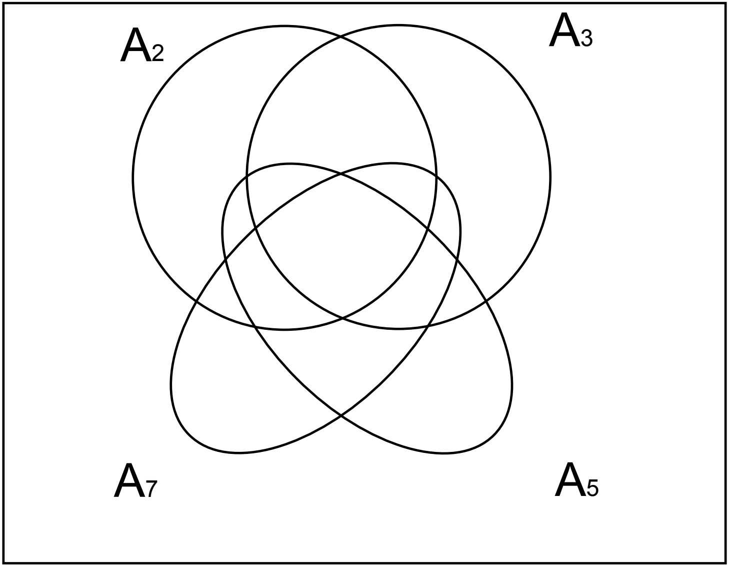
Nazaj k prvemu vprašanju

Potrebujemo torej še velikosti trojnih presekov.
Brž se prepričamo, da je $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 1$, vsi ostali trojni preseki pa so prazni.

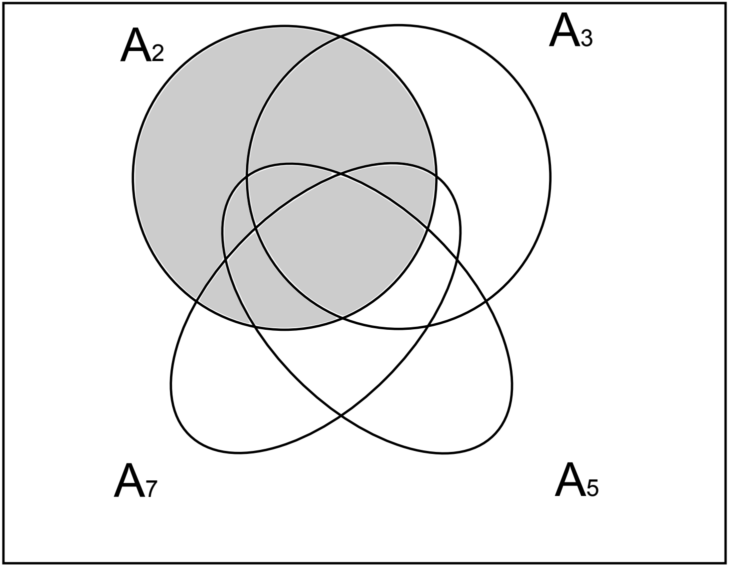
Račun $35 - 13 + 1 = 23$ da povsem pravilen odgovor (tudi v primeru deljivosti z 2, 3 ali 5 dobimo $31 - 10 + 1 = 22$, kar se ujema s pravilnim rezultatom).

Je to slučaj?
Poglejmo si kaj se dogaja pri štirih množicah v splošnem.

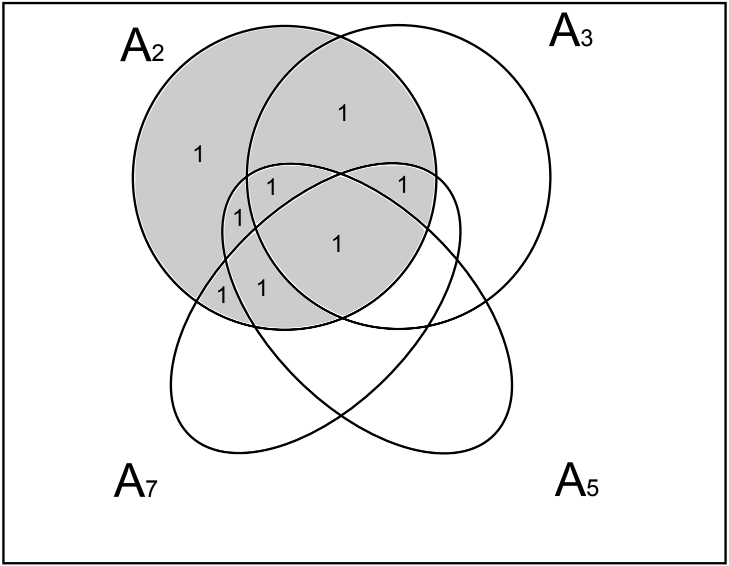
Vennovi diagrami za štiri množice



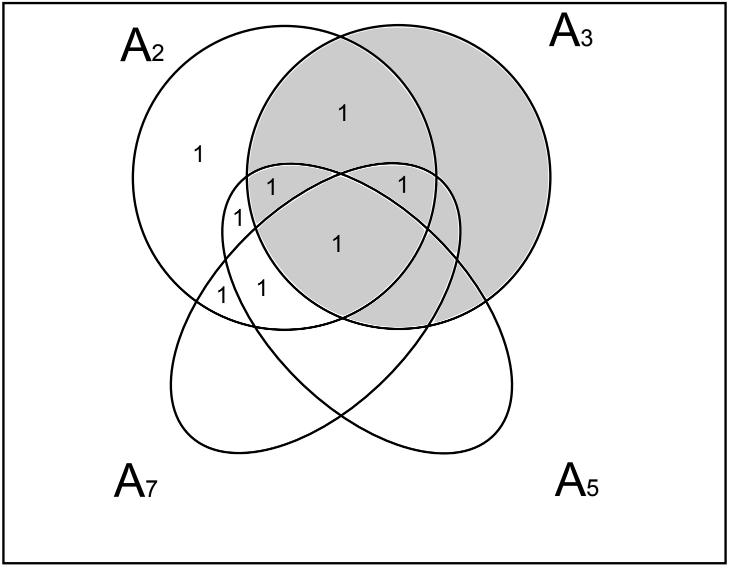
Vennovi diagrami za štiri množice



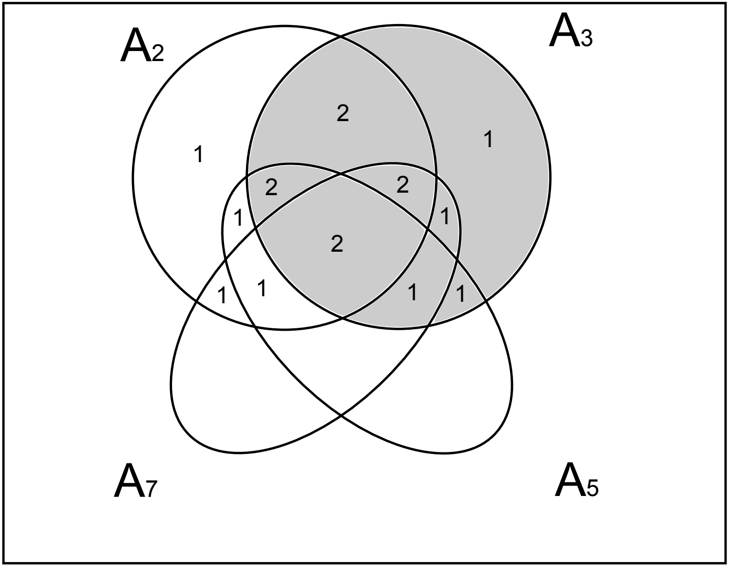
Vennovi diagrami za štiri množice



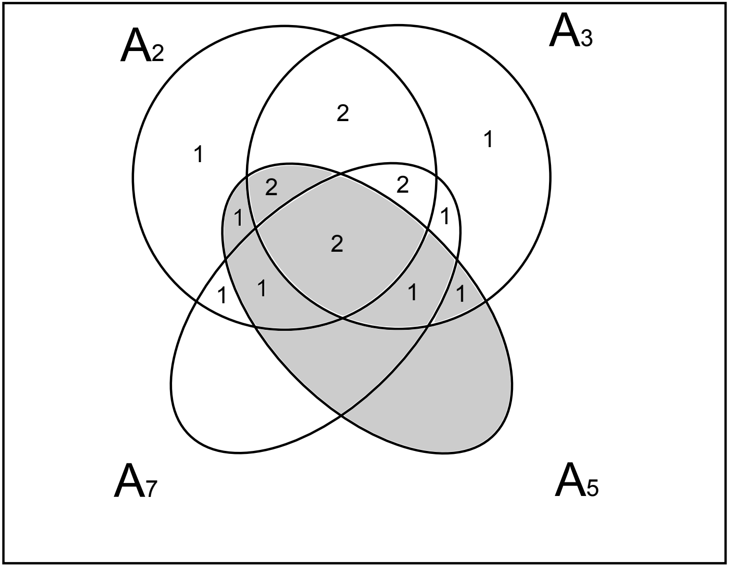
Vennovi diagrami za štiri množice



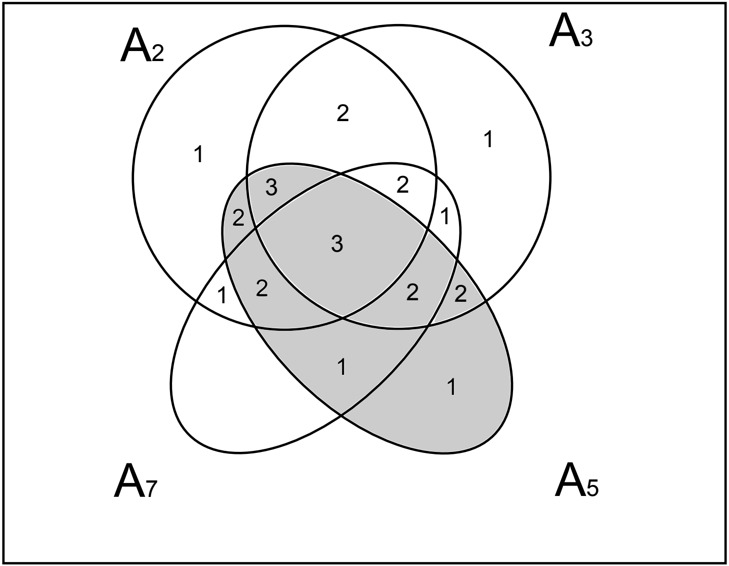
Vennovi diagrami za štiri množice



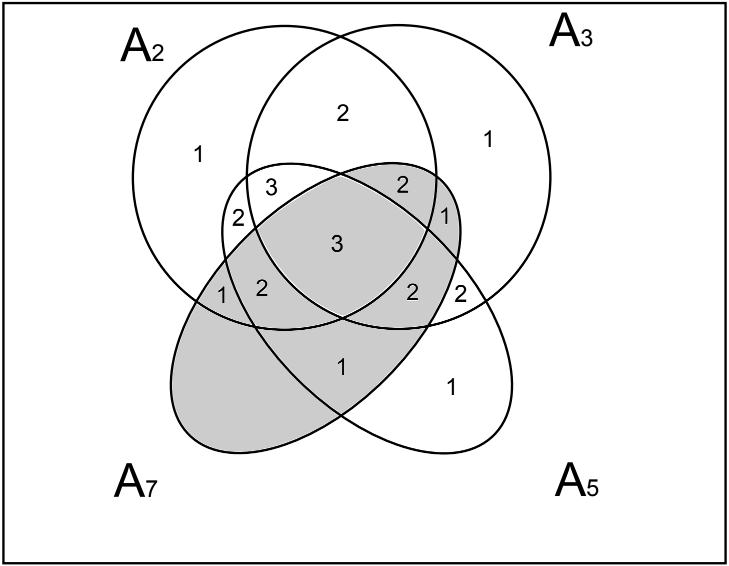
Vennovi diagrami za štiri množice



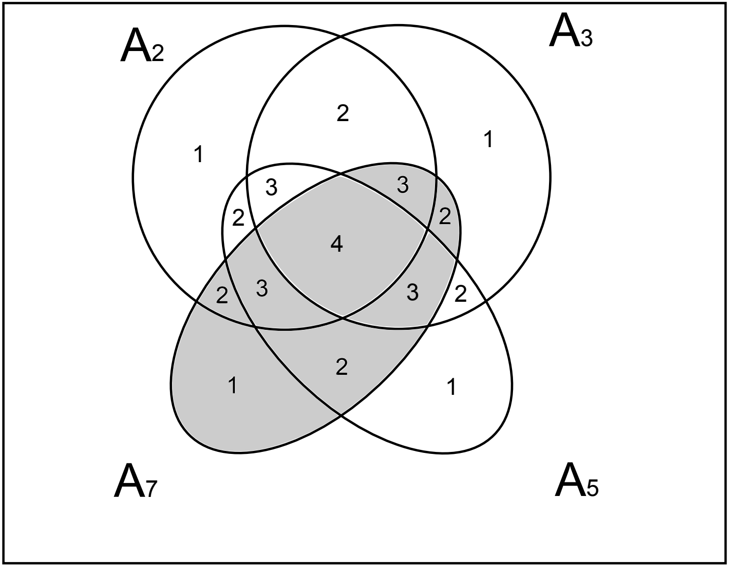
Vennovi diagrami za štiri množice



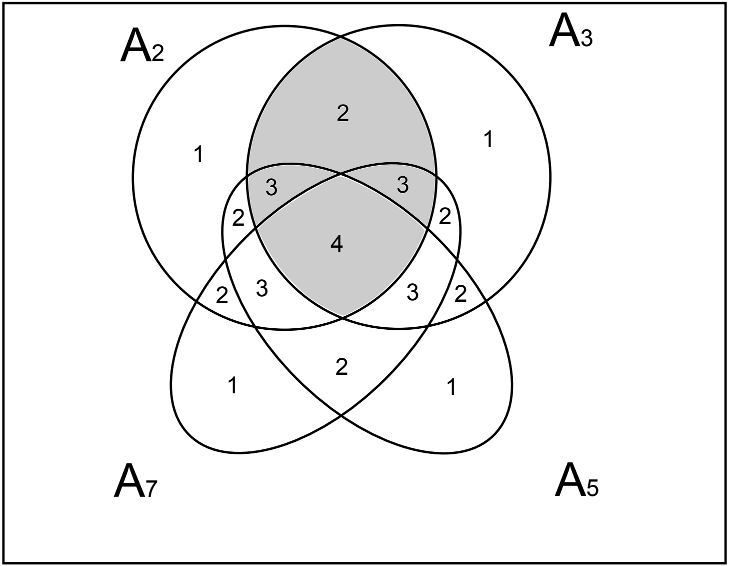
Vennovi diagrami za štiri množice



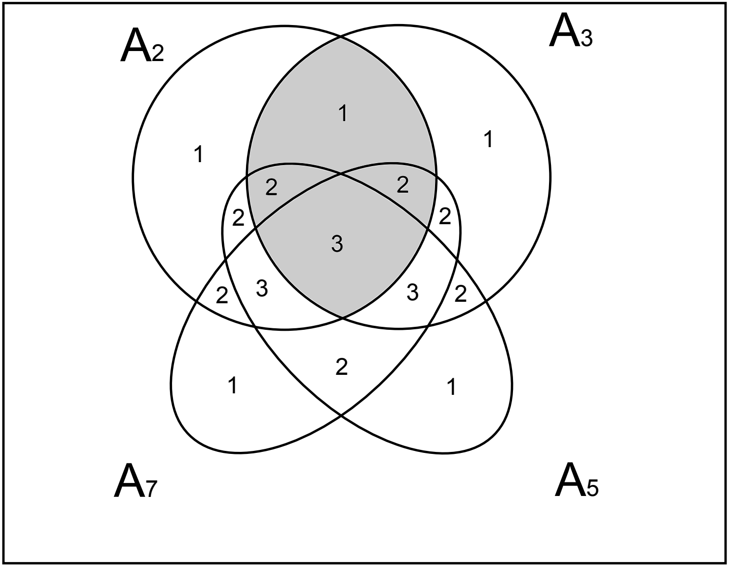
Vennovi diagrami za štiri množice



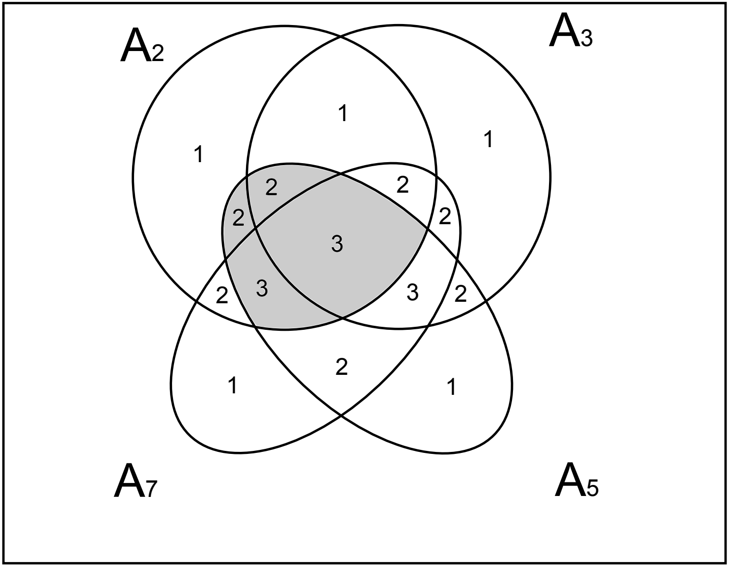
Vennovi diagrami za štiri množice



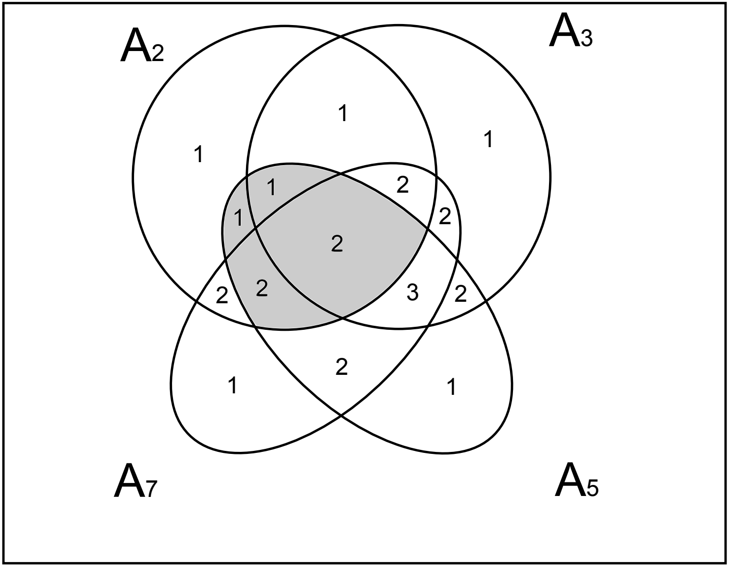
Vennovi diagrami za štiri množice



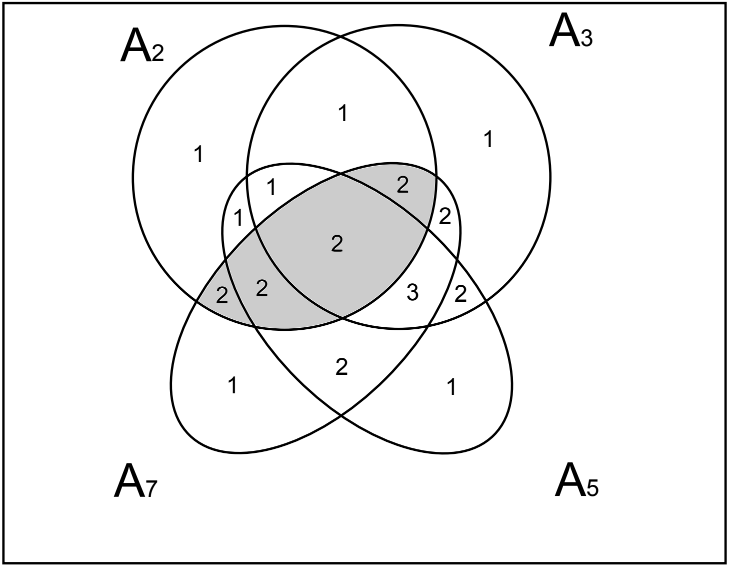
Vennovi diagrami za štiri množice

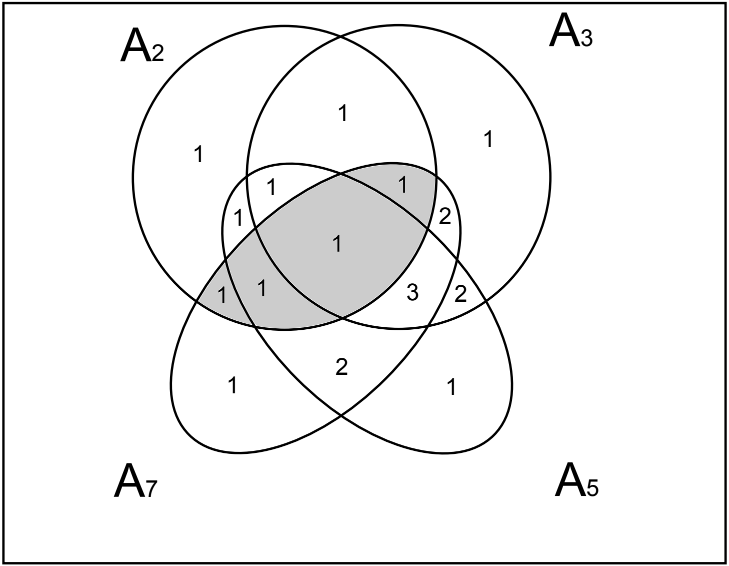


Vennovi diagrami za štiri množice

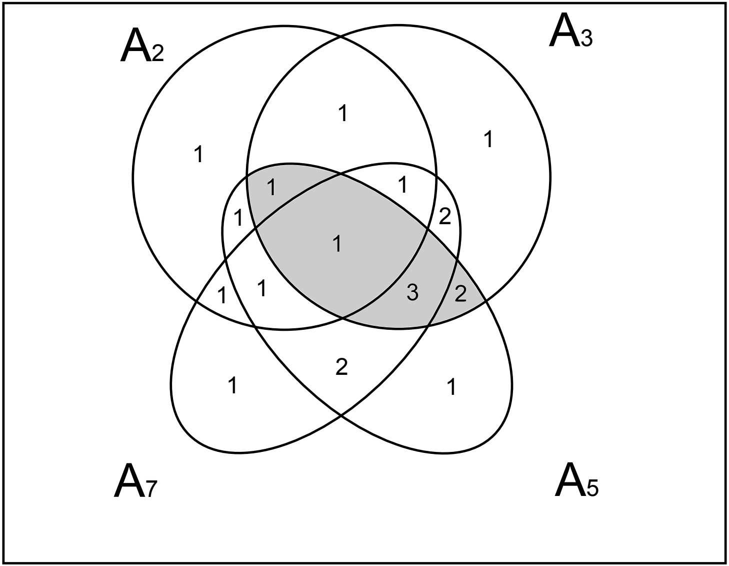


Vennovi diagrami za štiri množice

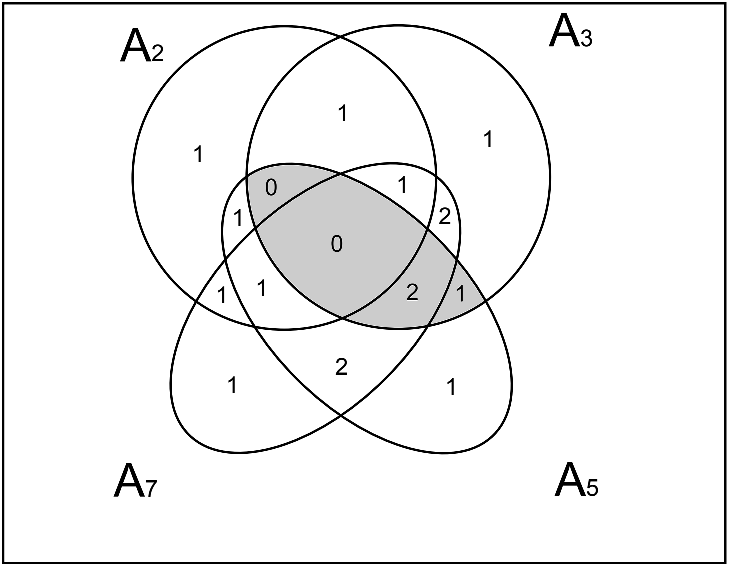



A2
A3
A7
A5
1
1
1
1
1
1
2
1
1
1
3
2
1
2
1

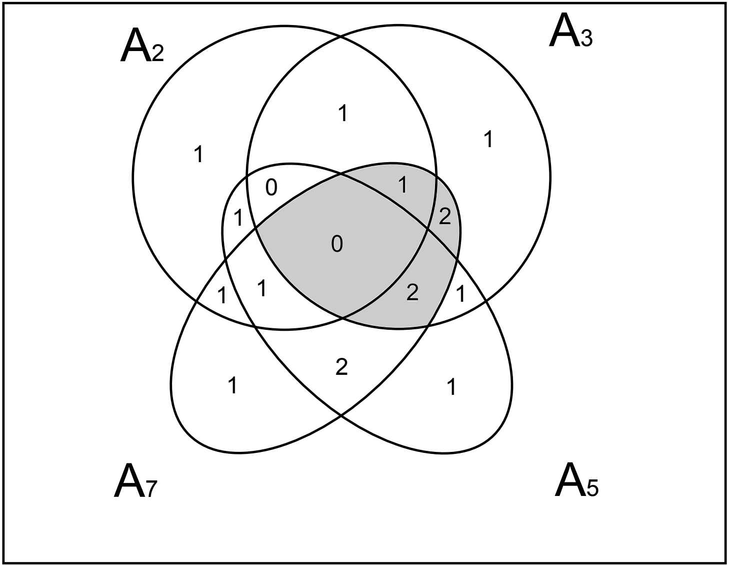
Vennovi diagrami za štiri množice



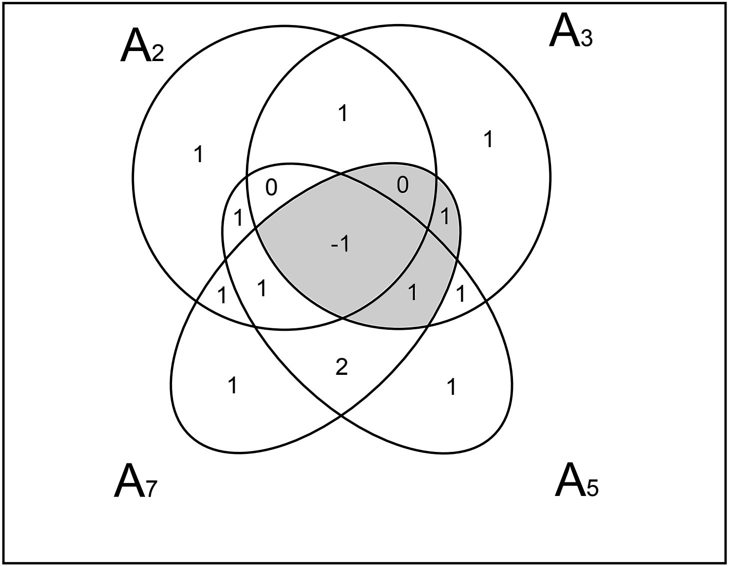
Vennovi diagrami za štiri množice



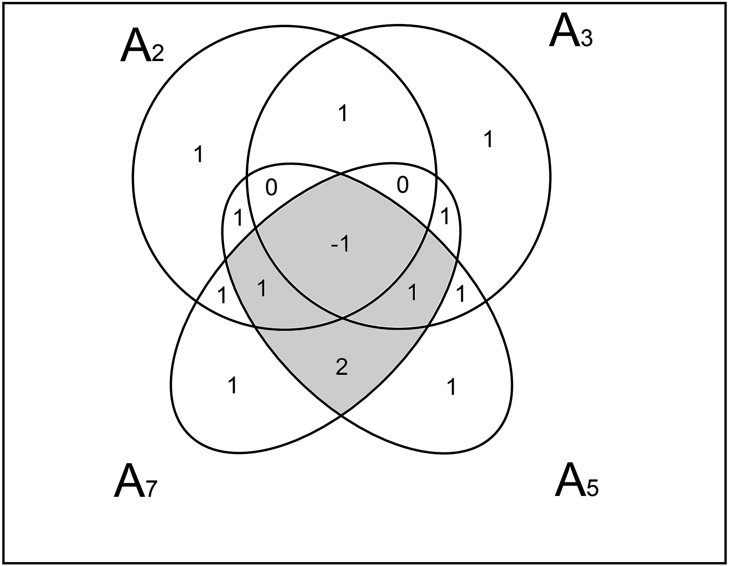
Vennovi diagrami za štiri množice



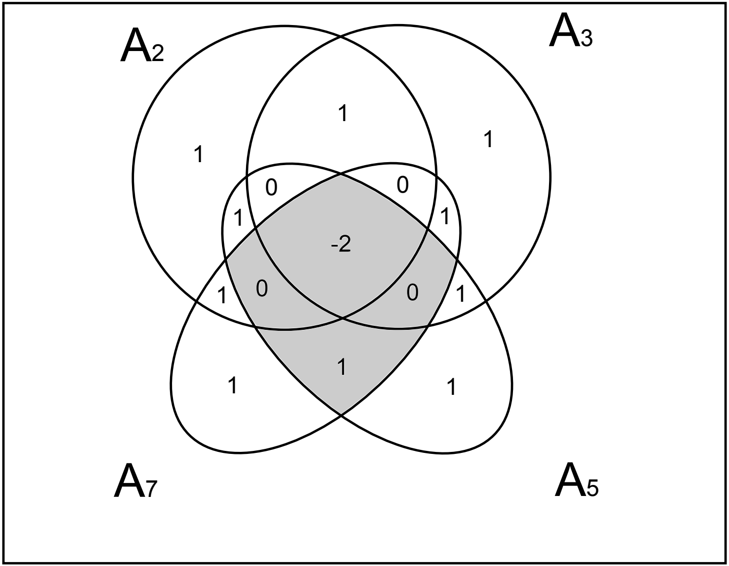
Vennovi diagrami za štiri množice



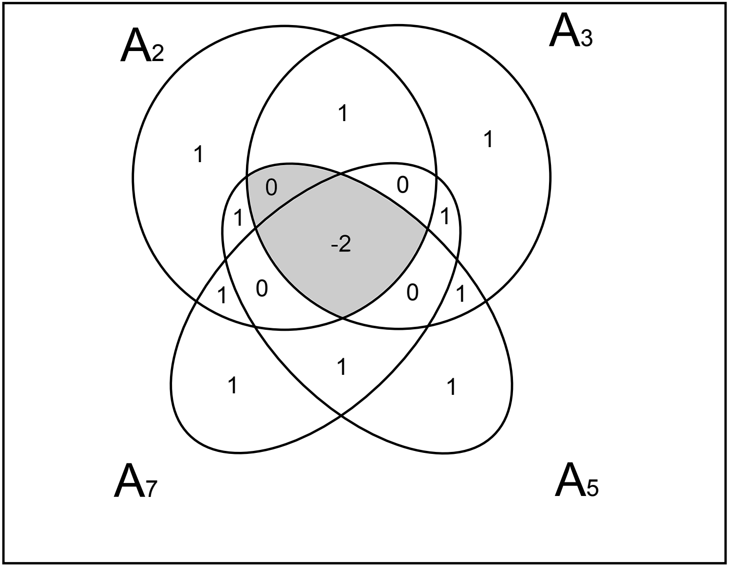
Vennovi diagrami za štiri množice



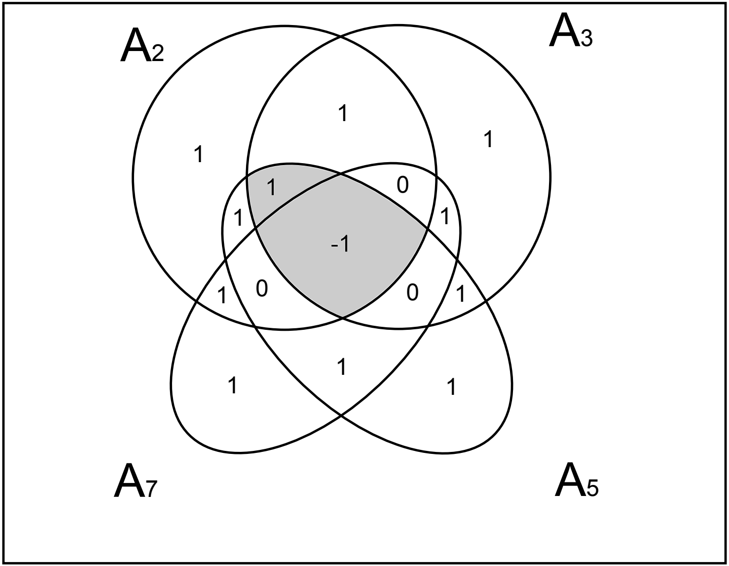
Vennovi diagrami za štiri množice



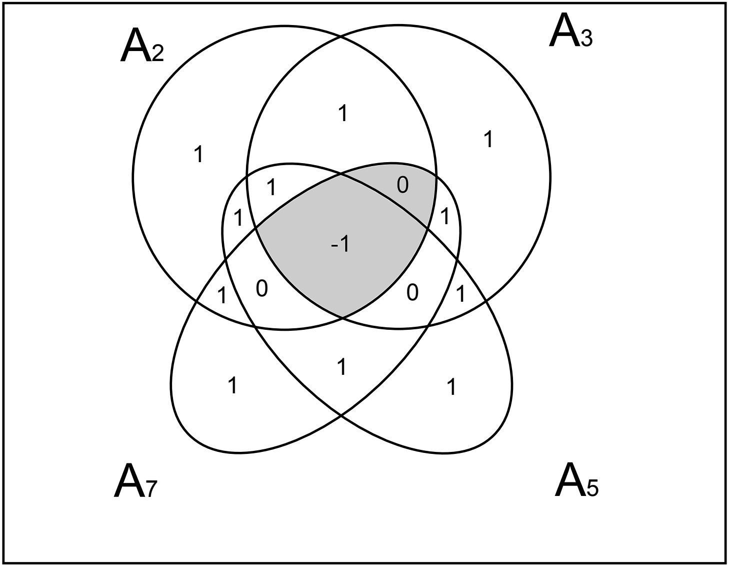
Vennovi diagrami za štiri množice



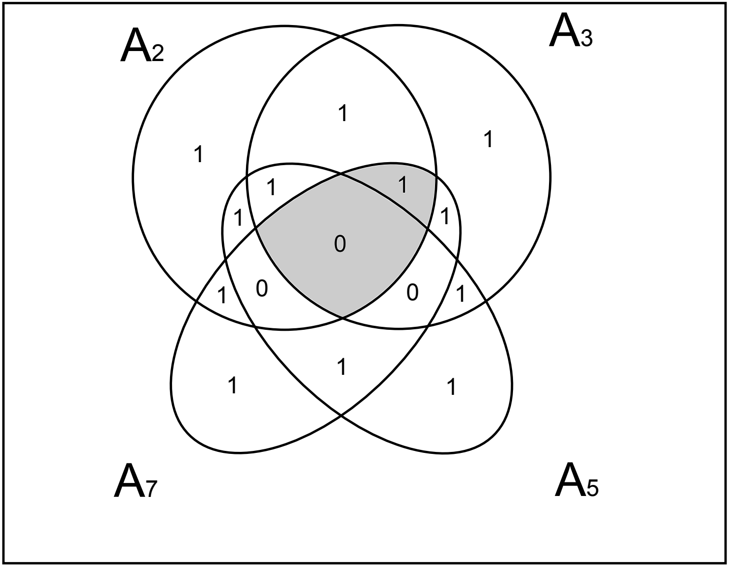
Vennovi diagrami za štiri množice



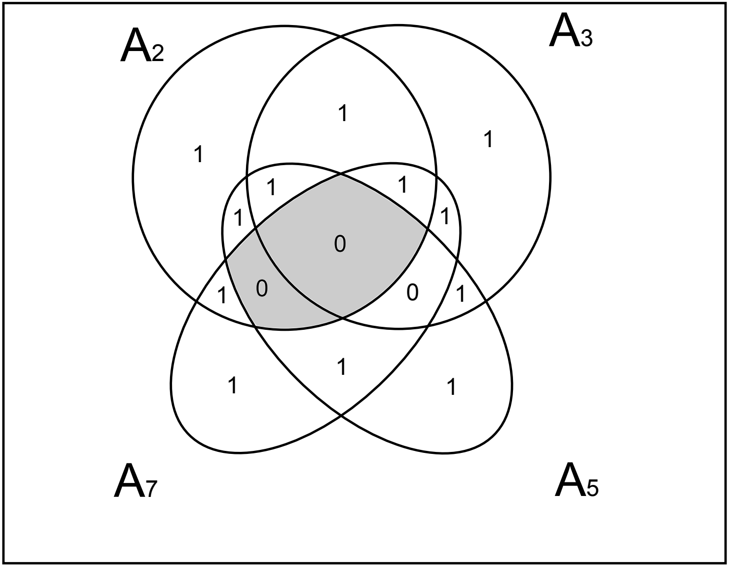
Vennovi diagrami za štiri množice



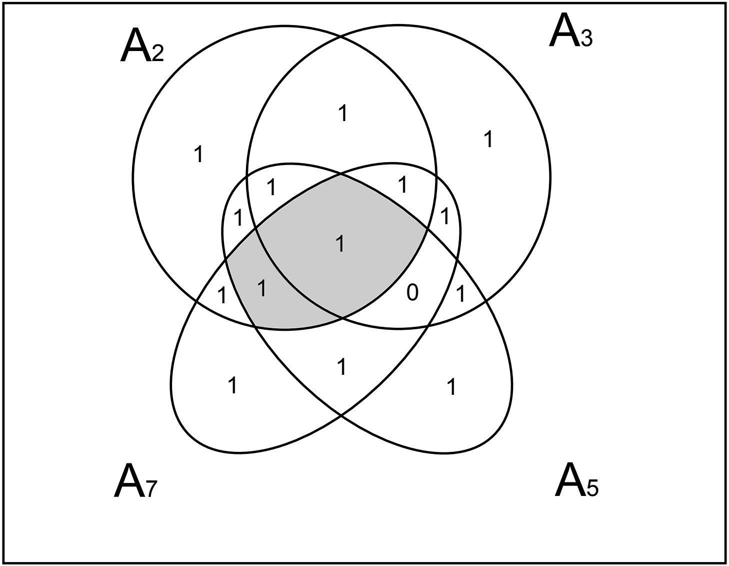
Vennovi diagrami za štiri množice



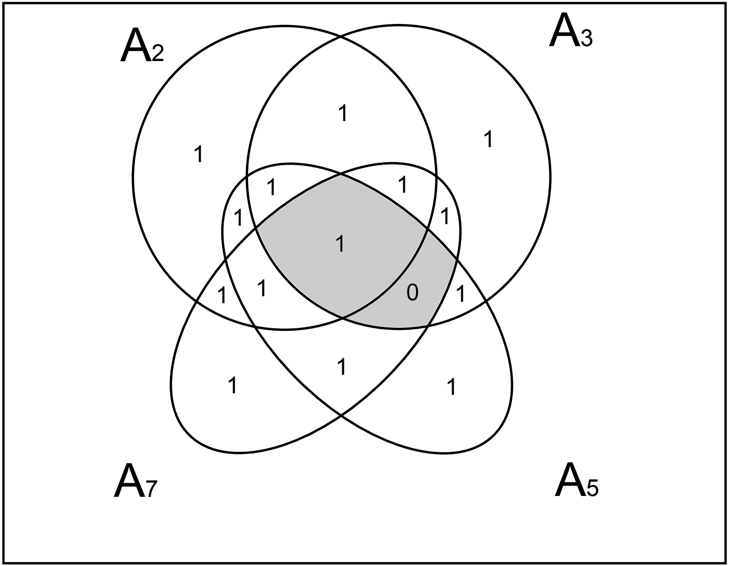
Vennovi diagrami za štiri množice



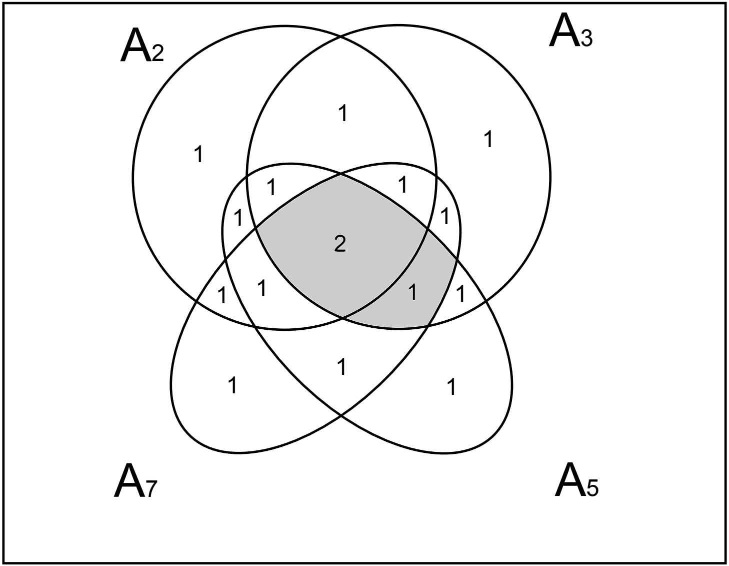
Vennovi diagrami za štiri množice



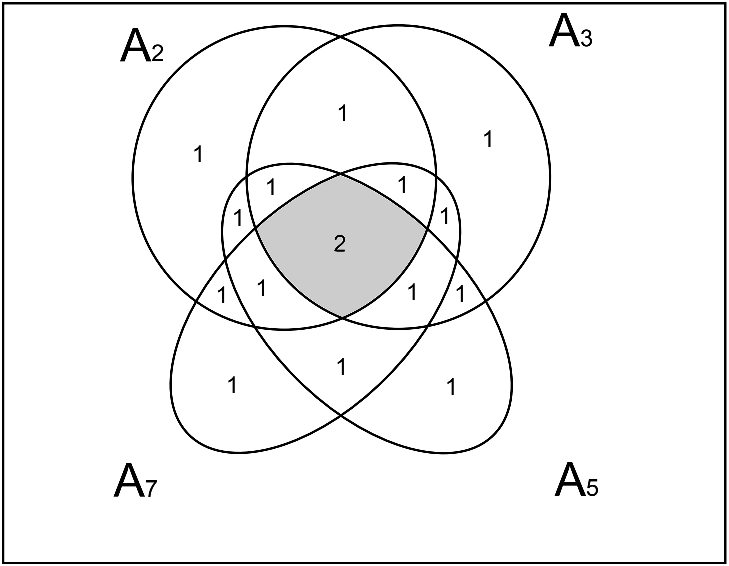
Vennovi diagrami za štiri množice



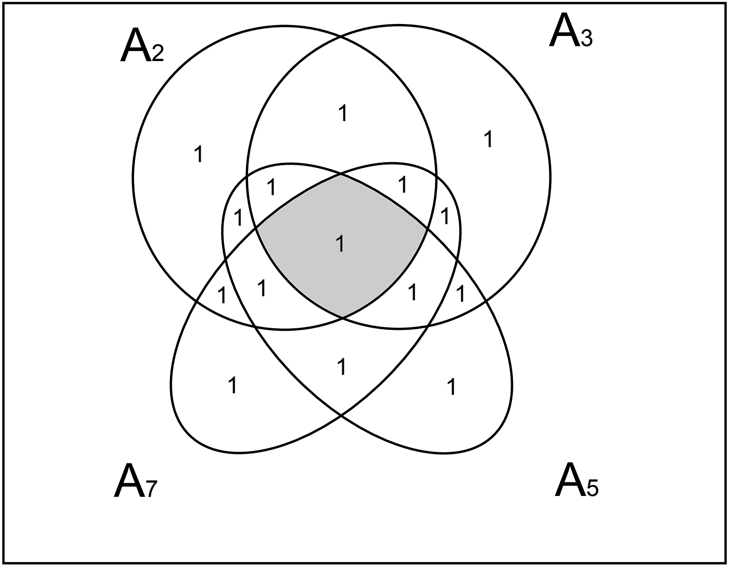
Vennovi diagrami za štiri množice



Vennovi diagrami za štiri množice



Vennovi diagrami za štiri množice



Vennovi diagrami za štiri množice

Vidimo torej, da velja naslednja formula:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| =$$

$$|A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7|$$

$$-(|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7|)$$

$$+|A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$

$$-|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|.$$

Načelo vključitev in izključitev

Sedaj že lahko razberemo splošno formulo.

Denimo, da imamo n (končnih) množic $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tedaj število reči, ki pripadajo vsaj eni izmed teh množic, dobimo tako, da

najprej seštejemo velikosti vsake posamezne množice,

nato odštejemo velikosti vseh dvojnih presekov,

pa zopet prištejemo velikosti vseh trojnih presekov množic,

pa odštejemo velikosti vseh presekov po štirih množic,

itd.

itd.

itd.

Načelo vključitev in izključitev

Če želimo to zapisati strogo matematično, dobimo nekaj takega:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \quad = \quad & \textstyle\sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \\
& \textstyle\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \\
& \textstyle\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\
& \textstyle\sum_{1 \le i < j < k < \ell \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| + \\
& \vdots \\
& (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Za dokaz splošne formule potrebujemo nekaj dodatnega znanja, zato ga izpustimo.

Odgovor na 2. vprašanje

Sedaj lahko zlahka odgovorimo na 2. vprašanje.

Označimo z A_i množico naravnih števil do vključno 1 000 000, ki so deljiva z i.

Zanima nas torej velikost množice $A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$.

Najprej izračunamo velikosti teh štirih množic:

$$
\begin{aligned}
|A_2| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{2} \right\rfloor = 500\,000 \\
|A_3| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{3} \right\rfloor = 333\,333 \\
|A_5| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{5} \right\rfloor = 200\,000 \\
|A_7| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{7} \right\rfloor = 142\,857
\end{aligned}
$$

Odgovor na 2. vprašanje

Nato dvojnih presekov:

$$
\begin{aligned}
|A_2 \cap A_3| &= |A_6| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{6} \right\rfloor = 166\,666 \\
|A_2 \cap A_5| &= |A_{10}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{10} \right\rfloor = 100\,000 \\
|A_2 \cap A_7| &= |A_{14}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{14} \right\rfloor = 71\,428 \\
|A_3 \cap A_5| &= |A_{15}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{15} \right\rfloor = 66\,666 \\
|A_3 \cap A_7| &= |A_{21}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{21} \right\rfloor = 47\,619 \\
|A_5 \cap A_7| &= |A_{35}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{35} \right\rfloor = 28\,571
\end{aligned}
$$

Pa trojnih:

$$
\begin{aligned}
|A_2 \cap A_3 \cap A_5| &= |A_{30}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{30} \right\rfloor = 33\,333 \\
|A_2 \cap A_3 \cap A_7| &= |A_{42}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{42} \right\rfloor = 23\,809 \\
|A_2 \cap A_5 \cap A_7| &= |A_{70}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{70} \right\rfloor = 14\,285 \\
|A_3 \cap A_5 \cap A_7| &= |A_{105}| &= \left\lfloor \frac{1\,000\,000}{105} \right\rfloor = 9\,523
\end{aligned}
$$

Odgovor na 2. vprašanje

In nazadnje še velikost preseka vseh štirih množic:

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = |A_{210}| = \lfloor \frac{1\,000\,000}{210} \rfloor = 4\,761$$

Tako po načelu vključitev in izključitev dobimo, da je stevilo naravnih števil do vključno enega milijona, ki so deljiva z vsaj enim izmed števil 2, 3, 5 ali 7, enako

$$\begin{aligned} & 500\,000 + 333\,333 + 200\,000 + 142\,857 \\ - & (166\,666 + 100\,000 + 71\,428 + 66\,666 + 47\,619 + 28\,571) \\ + & 33\,333 + 23\,809 + 14\,285 + 9\,523 \\ - & 4\,761 \\ = & 771\,429. \end{aligned}$$

Odgovor na 4. vprašanje

Najprej opazimo, da je $1\,000\,000 = 10^6 = (2 \cdot 5)^6 = 2^6 \cdot 5^6$.

To pomeni, da so "slaba" natanko tista števila, ki so deljiva z 2 ali s 5. Koliko pa je takih, znamo zlahka izračunati. Pri prejšnjih oznakah dobimo:

$|A_2| = 500\,000$, $|A_5| = 200\,000$ in $|A_2 \cap A_5| = |A_{10}| = 100\,000$.

Potemtakem je "slabih" $500\,000 + 200\,000 - 100\,000 = 600\,000$ števil in zato je števil, ki so tuja $1\,000\,000$ natanko $400\,000$.

Eulerjeva φ-funkcija

Načelo vključitev in izključitev je celo tako močno, da lahko dobimo splošno formulo za naloge zgornjega tipa.

Eulerjeva φ-funkcija

Število naravnih števil do vključno n, katerih največji skupni deljitelj z n je 1, označimo s $\varphi(n)$.

Funkciji φ pravimo Eulerjeva φ-funkcija. S pomočjo načela vključitev in izključitev je moč najti splošno formulo za $\varphi(n)$.

Dobimo jo takole. Naj bo k število različnih praštevil, ki delijo n in naj bodo ta praštevila $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Tedaj velja

$$\varphi(n) = n\frac{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)}{p_1 p_2 \cdots p_k}.$$

Preverimo za zgornji primer:

$$\varphi(1\,000\,000) = 2^6 5^6 \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5} = 400\,000.$$

Podobno za $2\,013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ dobimo

$$\varphi(2\,013) = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 60}{3 \cdot 11 \cdot 61} = 1\,200.$$

Ali pa za $20\,132\,013 = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 137$ dobimo

$$\varphi(20\,132\,013) = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 137 \frac{2 \cdot 10 \cdot 60 \cdot 72 \cdot 136}{3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 137} = 11\,750\,400.$$

Eulerjeva φ-funkcija

Zgolj za ilustracijo pokažimo, kako dobimo formulo za $\varphi(n)$ v primeru, ko je število n deljivo le z dvema različnima prašteviloma.

To pomeni, da je $n = p^i q^j$, kjer sta p in q neki različni praštevili, i in j pa naravni števili.

Kot že prej ugotovimo, da so "slaba" števila, ki so deljiva s p ali s q. Pa označimo množico naravnih števil do vključno n, ki so deljiva s p z A_p, podobno pa definirajmo še množico A_q.

Seveda je $\varphi(n) = n - |A_p \cup A_q|$.

Po načelu vključitev in izključitev pa je $|A_p \cup A_q| = |A_p| + |A_q| - |A_p \cap A_q|$.

Sedaj že vemo, da je $|A_p| = \frac{n}{p}$ in $|A_q| = \frac{n}{q}$.

Prav tako vemo, da je $|A_p \cap A_q| = \frac{n}{pq}$.

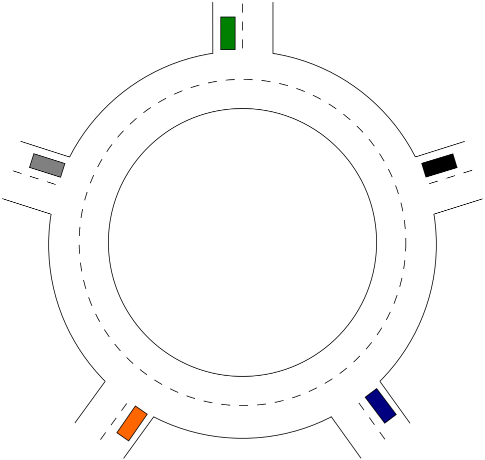
Tako je

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{n}{pq} = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = n \cdot \frac{(p-1)(q-1)}{pq}.$$

To pa se ujema z našo formulo.

Še krožišča

Rešimo še problem krožišč. Za začetek se omejimo na tistega s petimi priključnimi cestami.



Še križišča

Če izhajamo iz predpostavke, da zares po nobeni cesti ne odpelje več kot eno vozilo, potem po vsaki priključni cesti odpelje natanko eno vozilo.

Če za trenutek pozabimo na zahtevo, da vozilo ne sme narediti celega kroga in križišče zapustiti po cesti, po kateri je pripeljalo, potem je vseh možnosti $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Modro vozilo ima namreč pet možnosti glede "izvoza". Črno vozilo ima potem v vsakem primeru le še štiri možne izbire za izvoz, zeleno vozilo potem le še tri, itd.

Seveda pa smo tu upoštevali nekatere možnosti, ki jih ne smemo. Katere?

Še križišča

Slaba je recimo vsaka možnost, pri kateri modro vozilo križišče zapusti po “svoji” cesti. Podobno seveda za vsa ostala vozila.

Označimo torej z A_m možnosti, pri katerih modro vozilo križišče zapusti po “svoji” cesti, podobno pa potem definirajmo še množice A_c, A_z, A_s in A_o.

Seveda nas zanima število vseh slabih možnosti, ki je ravno $|A_m \cup A_c \cup A_z \cup A_s \cup A_o|$.

Po načelu vključitev in izključitev je potrebno izračunati velikosti posameznih množic in njihovih presekov.

Še križišča

Hitro vidimo, da je
$|A_m| = |A_c| = |A_z| = |A_s| = |A_o| = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Prav tako se brž prepričamo, da imamo deset dvojnih presekov, vsak izmed katerih je velikosti $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

Tudi trojnih presekov je deset, vsak pa je velikosti
$2! = 2 \cdot 1 = 2.$

Četvernih presekov je pet, vsak pa vsebuje le eno samo možnost (vsako vozilo naredi cel krog).

Seveda je tudi v preseku vseh petih množic ravno ta možnost, pri kateri vsa vozila naredijo cel krog.

Še križišča

Tako smo končno izračunali, da je število slabih možnosti enako

$$5 \cdot 24 - 10 \cdot 6 + 10 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 76$$

in tako je število ugodnih možnosti za križišče s petimi priključnimi cestami $120 - 76 = 44$.

Na povsem podoben način bi izračunali, da se odgovor na peto vprašanje, torej za primer, ko je priključnih cest 10, glasi 1 334 961.