

FAMNITOV POLETNI TABOR MATEMATIKA JE KUL 2013 Ko grafi priskočijo na pomoč

Boštjan Frelih

UP FAMNIT & UP IAM

29. avgust 2013

Vsebina

1 Risanje diagramov in Eulerjevi grafi

Vsebina

- 1 Risanje diagramov in Eulerjevi grafi
- 2 Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi

Vsebina

- 1 Risanje diagramov in Eulerjevi grafi
- 2 Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi
- 3 Ikozaederska igra oz. Potovanje okoli sveta

Risanje diagramov

- Ali lahko narišemo spodnji diagram z eno samo potezo? Pravilo je, da lahko vsako črto narišemo natanko enkrat.



Risanje diagramov

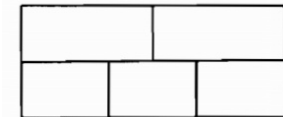
- Ali lahko narišemo spodnji diagram z eno samo potezo? Pravilo je, da lahko vsako črto narišemo natanko enkrat.



- Ali je pomembno, kje začnemo risati ta diagram?

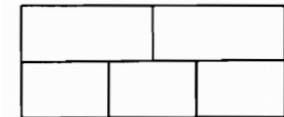
Risanje diagramov

- Kaj pa naslednji diagram? Ali lahko tega narišemo z eno samo potezo?



Risanje diagramov

- Kaj pa naslednji diagram? Ali lahko tega narišemo z eno samo potezo?



- Najmanj koliko potez potrebujemo, da ga narišemo?

Risanje diagramov

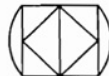
- Koliko potez potrebujemo, da narišemo vsakega od naslednjih diagramov?



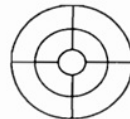
(a)



(b)



(c)



(d)

Risanje diagramov

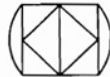
- Koliko potez potrebujemo, da narišemo vsakega od naslednjih diagramov?



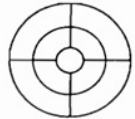
(a)



(b)



(c)



(d)

- Kako lahko zagotovo vemo, da smo narisali nek diagram z najmanjšim številom potez? Kako poiskati to najmanjše število potez?

Ko grafi priskočijo na pomoč

Definicija

Graf sestavlja neprazna množica elementov, ki jih imenujemo **točke** ali **vozlišča** grafa, in seznam (neurejenih) parov teh elementov, ki jih imenujemo **povezave** grafa.

Definicija

Dve ali več povezav, ki povezujejo isti par točk, imenujemo **vzporedne povezave** oz. **večkratne povezave**.

Ko grafi priskočijo na pomoč

Definicija

*Graf, ki je v enem kosu, je **povezan**, sicer pa je graf **nepovezan**. Povezavo povezanega grafa imenujemo **most**, če po njeni odstranitvi graf ni več povezan.*

Definicija

***Stopnja** točke je število povezav, ki vsebujejo to točko.*

Ko grafi priskočijo na pomoč

Vprašanje: Kaj lahko povemo o vsoti stopenj točk v grafu? Ali je ta vsota vedno liho število, vedno sodo število, ali je odvisno od grafa?

Ko grafi priskočijo na pomoč

Vprašanje: Kaj lahko povemo o vsoti stopenj točk v grafu? Ali je ta vsota vedno liho število, vedno sodo število, ali je odvisno od grafa?

Odgovor: Vsota stopenj točk v grafu je enaka dvakratnemu številu povezav, zato je ta vsota vedno sodo število.

Ko grafi priskočijo na pomoč

Vprašanje: Kaj lahko povemo o vsoti stopenj točk v grafu? Ali je ta vsota vedno liho število, vedno sodo število, ali je odvisno od grafa?

Odgovor: Vsota stopenj točk v grafu je enaka dvakratnemu številu povezav, zato je ta vsota vedno sodo število.

Vprašanje: Kaj lahko povemo o številu točk lihe stopnje v danem grafu? Ali je to število vedno liho, sodo, ali je odvisno od grafa?

Ko grafi priskočijo na pomoč

Vprašanje: Kaj lahko povemo o vsoti stopenj točk v grafu? Ali je ta vsota vedno liho število, vedno sodo število, ali je odvisno od grafa?

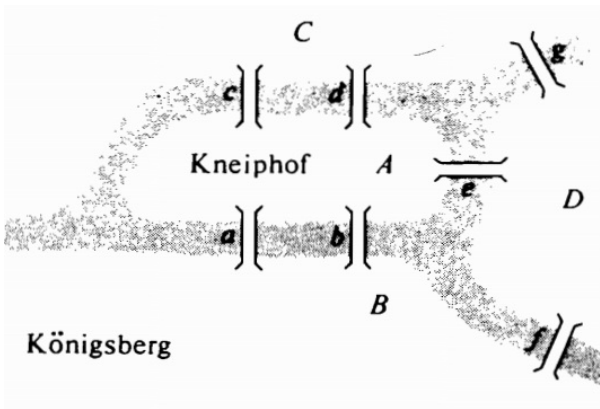
Odgovor: Vsota stopenj točk v grafu je enaka dvakratnemu številu povezav, zato je ta vsota vedno sodo število.

Vprašanje: Kaj lahko povemo o številu točk lihe stopnje v danem grafu? Ali je to število vedno liho, sodo, ali je odvisno od grafa?

V danem grafu je vedno sodo mnogo točk lihe stopnje.

Eulerjevi grafi

Štirje deli mesta Königsberg (A, B, C, D) so bili med seboj povezani s sedmimi mostovi (a, b, c, d, e, f, g).



Eulerjevi grafi

Naloga: Ali lahko poiščemo tak obhod vseh delov mesta Königsberg, da vsak most prečkamo natanko enkrat in se vrnemo na začetek obhoda?

Eulerjevi grafi

Naloga: Ali lahko poiščemo tak obhod vseh delov mesta Königsberg, da vsak most prečkamo natanko enkrat in se vrnemo na začetek obhoda?

Odgovor: Leonhard Euler (1707-1783) je dokazal, da to ni mogoče.

Eulerjevi grafi

Definicija

*Povezan graf je **Eulerjev**, če se lahko sprehodimo po povezavah grafa na tak način, da prehodimo vsako povezavo natanko enkrat in se vrnemo na začetek sprehoda. Tak sprehod imenujemo **Eulerjev obhod**.*

Izrek

Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko ima vsaka točka v grafu sodo stopnjo.

Eulerjevi grafi

Definicija

*Povezan graf je **Eulerjev**, če se lahko sprehodimo po povezavah grafa na tak način, da prehodimo vsako povezavo natanko enkrat in se vrnemo na začetek sprehoda. Tak sprehod imenujemo **Eulerjev obhod**.*

Izrek

Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko ima vsaka točka v grafu sodo stopnjo.

Vprašanje: Najmanj koliko dodatnih mostov bi rabili, da bi rešili problem obhoda mesta Königsberg?

Eulerjevi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med Eulerjevimi grafi in risanjem diagramov z eno potezo oz. z najmanjšim številom potez?

Eulerjevi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med Eulerjevimi grafi in risanjem diagramov z eno potezo oz. z najmanjšim številom potez?

Odgovor: Diagram si predstavimo z grafom. Če je graf, ki predstavlja nek diagram, Eulerjev, potem lahko ta diagram narišemo z eno potezo.

Eulerjevi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med Eulerjevimi grafi in risanjem diagramov z eno potezo oz. z najmanjšim številom potez?

Odgovor: Diagram si predstavimo z grafom. Če je graf, ki predstavlja nek diagram, Eulerjev, potem lahko ta diagram narišemo z eno potezo.

Vprašanje: Ali je res, da če lahko nek diagram narišemo z eno potezo, potem je njegov pripadajoči graf Eulerjev?

Eulerjevi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med Eulerjevimi grafi in risanjem diagramov z eno potezo oz. z najmanjšim številom potez?

Odgovor: Diagram si predstavimo z grafom. Če je graf, ki predstavlja nek diagram, Eulerjev, potem lahko ta diagram narišemo z eno potezo.

Vprašanje: Ali je res, da če lahko nek diagram narišemo z eno potezo, potem je njegov pripadajoči graf Eulerjev?

Odgovor: Ne.

Poleulerjevi grafi

Definicija

*Povezan graf je **Poleulerjev**, če se lahko sprehodimo po povezavah grafa na tak način, da prehodimo vsako povezavo natanko enkrat. Tak sprehod imenujemo **Eulerjev sprehod**.*

Izrek

Povezan graf je Poleulerjev natanko tedaj, ko ima natanko dve točki lihe stopnje.

Risanje diagramov

Vprašanje: Kdaj lahko narišemo diagram z eno samo potezo?

Risanje diagramov

Vprašanje: Kdaj lahko narišemo diagram z eno samo potezo?

Odgovor: Diagram lahko narišemo z eno potezo natanko tedaj, ko je njegov pripadajoči graf Eulerjev ali Poleulerjev.

Risanje diagramov

Vprašanje: Ali obstaja postopek, po katerem poiščemo Eulerjev obhod v Eulerjevem grafu?

Risanje diagramov

Vprašanje: Ali obstaja postopek, po katerem poiščemo Eulerjev obhod v Eulerjevem grafu?

Odgovor: Da, ta postopek se imenuje Fleuryjev algoritem.

Korak 1: Izberi začetno točko.

Korak 2: Prečkaj poljubno povezavo, le most izberi samo, kadar ni na voljo nobene druge povezave.

Korak 3: Prehojeno povezavo odstrani. Prav tako odstrani vse točke stopnje 0.

Korak 4: Končaj, ko ni nobene povezave več.

Risanje diagramov

Vprašanje: Ali lahko uporabimo Fleuryjev algoritem, da poiščemo Eulerjev sprehod v Poleulerjevem grafu?

Risanje diagramov

Vprašanje: Ali lahko uporabimo Fleuryjev algoritem, da poiščemo Eulerjev sprehod v Poleulerjevem grafu?

Odgovor: Da, vendar za začetno točko vedno vzemimo točko lihe stopnje.

Risanje diagramov

Vprašanje: Kako vemo, koliko najmanj potez potrebujemo, da narišemo nek diagram?

Risanje diagramov

Vprašanje: Kako vemo, koliko najmanj potez potrebujemo, da narišemo nek diagram?

Odgovor: Če diagramu narišemo njegov pripadajoči graf, in če ima ta graf $2n$ točk lihe stopnje za neko naravno število n , potem potrebujemo vsaj n potez, da narišemo ta diagram.

Problem šahovskega konjička

Problem: Na običajno šahovnico velikosti 8×8 polj postavimo šahovskega konjička. Po šahovskih pravilih premikamo konjička, pri tem bi radi obiskali vsako polje šahovnice natanko enkrat in se vrnili na začetno polje.

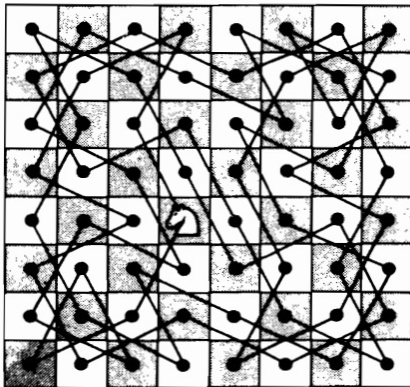
Problem šahovskega konjička

Problem: Na običajno šahovnico velikosti 8×8 polj postavimo šahovskega konjička. Po šahovskih pravilih premikamo konjička, pri tem bi radi obiskali vsako polje šahovnice natanko enkrat in se vrnili na začetno polje.

Vprašanje: Ali obstaja rešitev za to nalogo?

Problem šahovskega konjička

Odgovor: Da. To je le ena od mnogih rešitev.



Problem šahovskega konjička

Vprašanje: Ali lahko poiščemo rešitev za problem šahovskega konjička v primeru, ko imamo šahovnice velikosti 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 ali 5×5 ?

Problem šahovskega konjička

Vprašanje: Ali lahko poiščemo rešitev za problem šahovskega konjička v primeru, ko imamo šahovnice velikosti 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 ali 5×5 ?

Vprašanje: Kaj pa za naslednjo prirejeno šahovnico velikosti 4×6 , kjer so polja ozčena z znakom X prepovedana, da jih konjiček obiše?

x	x	x		x	x
				x	
x	x		x		x
			x		x

Hamiltonovi grafi

Definicija

*Sprehod v grafu pri katerem obiščemo vsako točko grafa natanko enkrat, nobene povezave ne prehodimo dvakrat in je končna točka enaka začetni točki imenujemo **Hamiltonov cikel**. Če tak cikel v grafu obstaja, potem rečemo, da je graf **Hamiltonov**.*

Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med rešitvijo problema šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi?

Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med rešitvijo problema šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi?

Odgovor: Polja šahovnice predstavimo kot točke grafa, dve točki pa sta med seboj sosednji, če sme konjiček skočiti z enega polja direktno na drugo polje in obratno. Rešitev problema obstaja natanko tedaj, ko je graf, ki ga dobimo, Hamiltonov.

Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi

Vprašanje: Kakšna je povezava med rešitvijo problema šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi?

Odgovor: Polja šahovnice predstavimo kot točke grafa, dve točki pa sta med seboj sosednji, če sme konjiček skočiti z enega polja direktno na drugo polje in obratno. Rešitev problema obstaja natanko tedaj, ko je graf, ki ga dobimo, Hamiltonov.

Torej moramo preveriti, ali Hamiltonov cikel v grafu obstaja ali ne. Včasih to ni težko, ponavadi pa je to kar težka naloga.

Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi

Vprašanje: Ali lahko poiščemo rešitev za problem šahovskega konjička v primeru, ko imamo šahovnice velikosti 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 ali 5×5 ?

Problem šahovskega konjička in Hamiltonovi grafi

Vprašanje: Ali lahko poiščemo rešitev za problem šahovskega konjička v primeru, ko imamo šahovnice velikosti 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 ali 5×5 ?

Naloga: Razloži, zakaj ne moremo najti rešitve za šahovnice velikosti $n \times n$, kjer je n liho naravno število, ki je večje od ena?

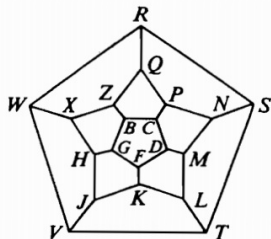
Ikozaederska igra oz. Potovanje okoli sveta

Igro si je izmislil matematik Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

Ikozaederska igra oz. Potovanje okoli sveta

Igro si je izmislil matematik Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

Problem: Koliko Hamiltonovih ciklov, ki se začnejo z zaporedjem točk $BCPNM$ lahko najdemo v grafu dodekaedra?

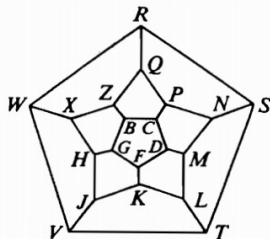


Ikozaederska igra oz. Potovanje okoli sveta

Odgovor: Natanko dve:

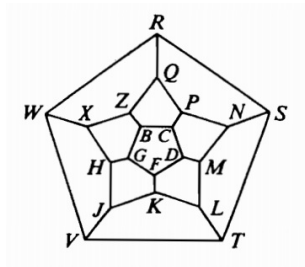
BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB

BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB



Ikozaederska igra oz. Potovanje okoli sveta

Problem: Koliko Hamiltonovih ciklov, ki se začnejo z zaporedjem točk *JVTSR* lahko najdemo v grafu dodekaedra?



Najlepša hvala.